第 3 节 诱导公式（★★）

强化训练

1．（2022•成都模拟•★★）已知 $\tan\theta=2$，则 $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=$______.

答案： -2

解析： $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)-\cos(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)-\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{\cos\theta-(-\cos\theta)}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\dfrac{2}{1-\tan\theta}=-2$.

2.（2022 •襄阳模拟 •★★）已知函数 $f(x)=a\sin(\pi x+\alpha)+b\cos(\pi x+\beta)$，且 $f(3)=3$，则 $f(2022)$ 的值为（　　）

（A）-1（B）1　（C）3　（D）-3

答案： D

解析： 本题无法求出 a、b、α、β，故先看看由 $f(3)=3$ 能得到什么，和 $f(2022)$ 又有什么关系，

由题意，$f(3)=a\sin(3\pi+\alpha)+b\cos(3\pi+\beta)=-a\sin\alpha-b\cos\beta=3$，所以 $a\sin\alpha+b\cos\beta=-3$，

故 $f(2022)=a\sin(2022\pi+\alpha)+b\cos(2022\pi+\beta)=a\sin\alpha+b\cos\beta=-3$.

3．（2022•自贡期末•★★）已知 $\sin(\frac{\pi}{5}-x)=\frac{3}{5}$，则 $\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=$______.

答案： $-\dfrac{3}{5}$

解析： 给值求值问题，先尝试探究角之间的关系，为了便于观察，可将已知的角换元来看，

设 $t=\frac{\pi}{5}-x$，则 $x=\frac{\pi}{5}-t$，且 $\sin t=\frac{3}{5}$，所以 $\cos(\frac{7\pi}{10}-x)=\cos[\frac{7\pi}{10}-(\frac{\pi}{5}-t)]=\cos(\frac{\pi}{2}+t)=-\sin t=-\frac{3}{5}$.

4．（2022•湖南模拟•★★）已知 $\cos(\frac{5\pi}{12}+\alpha)=\frac{1}{3}$，且 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，则 $\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=$（　　）

（A）$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$（B）$\dfrac{1}{3}$（C）$-\dfrac{1}{3}$（D）$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

答案： D

解析： 设 $t=\frac{5\pi}{12}+\alpha$，则 $\alpha=t-\frac{5\pi}{12}$，且 $\cos t=\frac{1}{3}$，所以 $\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=\cos[\frac{\pi}{12}-(t-\frac{5\pi}{12})]=\cos(\frac{\pi}{2}-t)=\sin t$，

已知 $\cos t$ 求 $\sin t$，得研究 t 的范围，才能确定开平方该取正还是取负，

因为 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$，所以 $-\frac{7\pi}{12}<t=\frac{5\pi}{12}+\alpha<-\frac{\pi}{12}$，故 $\sin t<0$，

所以 $\sin t=-\sqrt{1-\cos^2 t}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故 $\cos(\frac{\pi}{12}-\alpha)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

5.（2022·山西二模·★★★）若$\sin 10^\circ = a\sin 100^\circ$，则$\sin 20^\circ =$（　　）

（A）$\dfrac{a}{a^2+1}$　　（B）$-\dfrac{a}{a^2+1}$　　（C）$\dfrac{2a}{a^2+1}$　　（D）$-\dfrac{2a}{a^2+1}$

答案：C

解析：注意到求值的角$20^\circ = 2\times 10^\circ$，所以将已知等式中的$100^\circ$转换成$10^\circ$，

由题意，$\sin 10^\circ = a\sin 100^\circ = a\sin(90^\circ+10^\circ) = a\cos 10^\circ$，所以$\tan 10^\circ = a$，

故$\sin 20^\circ = 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ = \dfrac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ} = \dfrac{2\tan 10^\circ}{\tan^2 10^\circ + 1} = \dfrac{2a}{a^2+1}$.

6.（★★★）计算：

（1）$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ =$______；（2）$\dfrac{\lg(\tan 1^\circ) + \lg(\tan 2^\circ) + \cdots + \lg(\tan 89^\circ)}{\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ} =$______.

答案：（1）$\dfrac{89}{2}$；（2）0

解析：（1）$\sin^2 1^\circ$，$\sin^2 2^\circ$等无法直接计算，考虑组合计算，注意到$\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ = 1$，类似的，$\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ = 1$，…，计算的方法就出来了，

记$S = \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$ ①，

因为$\sin 1^\circ = \sin(90^\circ - 89^\circ) = \cos 89^\circ$，$\sin 2^\circ = \sin(90^\circ - 88^\circ) = \cos 88^\circ$，…，$\sin 89^\circ = \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ$，

代入式①得：$S = \cos^2 89^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 87^\circ + \cdots + \cos^2 1^\circ = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ$ ②，

所以①+②可得：$2S = (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \cdots + (\sin^2 89^\circ + \cos^2 89^\circ) = 89$，故$S = \dfrac{89}{2}$.

（2）先用对数的运算性质将分子合并，$\lg(\tan 1^\circ) + \lg(\tan 2^\circ) + \cdots + \lg(\tan 89^\circ) = \lg(\tan 1^\circ \tan 2^\circ \cdots \tan 89^\circ)$，

因为$\tan 1^\circ \tan 2^\circ \cdots \tan 89^\circ = \dfrac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ}\cdot\dfrac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}\cdots\dfrac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ} = \dfrac{\sin 1^\circ}{\sin 89^\circ}\cdot\dfrac{\sin 2^\circ}{\sin 88^\circ}\cdots\dfrac{\sin 89^\circ}{\sin 1^\circ} = 1$，

所以$\lg(\tan 1^\circ \tan 2^\circ \cdots \tan 89^\circ) = \lg 1 = 0$，故原式$=0$.